古典 spin 鎖の spin wave と Irregular motion

福岡工大　中村勝弘

Hamiltonian 系の dynamics における Irregular あるいは chaotic states の研究は天体力学や原子・分子のレベル（量子準位の random distribution）で活発になっているが，固体物理のレベルになると，話が一層興味深くなる。

Nonlinear coupling で結合した調和振動子系の研究 (Fermi-Pasta-Ulam) は，非可積分系におけるKAMの概念を産み出すと同時に，高次の非線型項を繰りこんだ完全可積分な指数格子（戸田格子）を産みだした。しかし，戸田格子の出現は，同時に，一つの歴史の終りを意味する。実際，この格子は，soliton, phonon など，いわゆる regular orbit 以外の orbit，つまり Irregular state を産み出さない。

他方，Spin lattice 系における Irregular state の研究はまだない。今，XXZ 型の spin Hamiltonian

$$H = J \sum_{<ij>} \{ (S_i^+ S_j^- + \mathrm{c.c.})/2 + W \cdot S_i^z S_j^z \} \tag{1}$$

を考えよう。(1) において，spin 1/2 の 1-d 量子 spin 鎖は完全可積分であるが，(1) の古典版はどうであろうか？ Faddeev (1982) と Ishimori (1982) により指摘されたように，

$$H'_{\mathrm{cl}} = J \sum_{<ij>} \{ \vec{S}_i \vec{S}_j - \frac{1}{2} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j)^2 + \cdots\cdots \}$$

$$= J \sum_{<ij>} \ln (1 + \vec{S}_i \vec{S}_j) \tag{2}$$

という Hamiltonian からえられる運動方程式は，discrete な Lax pair を持ち，discrete な Nonlinear Schrödinger eq. と Gauge 同等である。又，(1) で J が強磁性結合の時，lattice const → 0 等の極限でえられる Hamiltonian

$$H''_{\mathrm{cl}} = \int \{ \frac{\hat{J}}{2} (\nabla_x \vec{S})^2 + \vec{S} \overleftrightarrow{D} \vec{S} \} \, dx \tag{3}$$

は，Landau-Lifshitz eq. を運動方程式に持つ。Nakamura–Sasada (1982) によって示されたように，これは continuum Nonlinear Schrödinger eq. と Gauge 同等である。しかし，最も familiar な

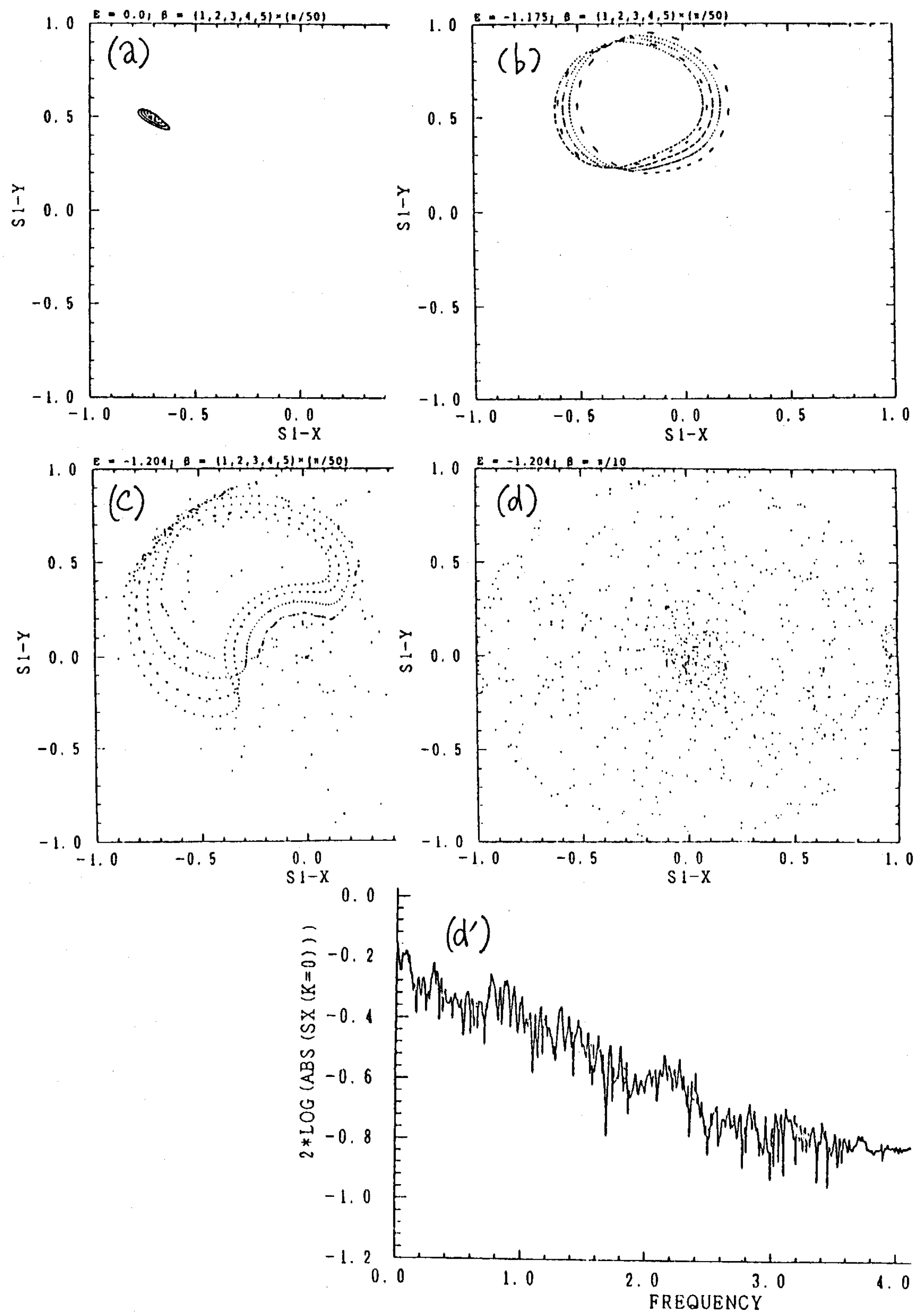

図1　(a) $E = 0.0$
(b) $E = -1.175$
(c) $E = -1.204$
(d) $E = -1.204$
(d′) $E = -1.204$

・(a)～(d) は $\frac{\mathrm{d}S_1^z}{\mathrm{d}t} = 0$ できまる

Poincare断面の $S_1^x - S_1^y$ 面への projection

・(d′) は (d) の power spectrum

$$H_{\mathrm{cl}}=J\sum_{<ij>}\vec{S}_i\cdot\vec{S}_j$$

あるいはその一般化である(1)式の古典版は可積分ではない。実際(1)の古典的な運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{S}_j=\vec{S}_j\times(-\delta H/\delta\vec{S}_j) \tag{4}$$

は，磁化M_z と energy E 以外の保存量を持たない($W=1.0$ の等方的な場合は，他にM_x，M_y が保存量である)。戸田格子と異なり，spin は lattice sites に固定されているので，運動量に相当する保存量はない。

今，3個の spin からなる周期鎖を考える。これは三角格子状になっているので 2-d tri-angular lattice への足場にもなる。以下，結合は反強磁性交換相互作用に限る。XXZ型の結合の時，位相空間の自由度は6(3個の spin の polar and azimuthal angles)$-1(E)-1(M_z)=4$ で chaos が期待できる。変分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\vec{S}_j=-\delta\vec{S}_j\times\frac{\delta H}{\delta\vec{S}_j}-\vec{S}_j\times\sum_i\frac{\delta^2 H}{\delta\vec{S}_i\,\delta\vec{S}_j}\,\delta\vec{S}_i \tag{5}$$

の linearized version からえられる固有値問題を解くことにより，orbit の local stability がわかる。これは位相空間の負曲率領域を求める問題である。解析によると，負曲率領域は高energy 領域ではなく，低 energy 領域に存在している! これは，Henon-Heiles 系や Sinai の Billiard と決定的に異なり，Q.C.D. の真空 (Savidy) の場合をほうふつさせる。

以下，(4)式の spin dynamics を数値的に解き，得られた結果を示す。図1(a)→(b)→(c) は高 energy 領域から energy を下げていった時の orbit の Poincare surface of section である(各図には，5種類の orbit が記されている)。1(c)図から，KAM の一部(第5番目の orbit)が崩れ，chaos が出現することがわかる。この orbit だけの long-run が1(d)図である。1(d′)図は，1(d)の global chaos に対応する transverse power spectrum で broad な構造を示している。

他方，基底状態(120° 構造)の energy ($-1.5J$)から energy をあげていった時の orbit (この場合は一種類)が，2(a)→(b)→(c)であり，それらに対応する transverse power spectrum が2(a′)→(b′)→(c′)である。2(a)ではKAMが局在しており，spin wave に対応する。2(b)は，一種の分岐を示しており，2(b′)の power spectrum から判断して，局在 chaos をあらわしている。2(c)は phase symmetry が回復した状態での global chaos である。更に energy を高めると，中空部分に軌道が進出して1(d)図に近ずいていく。

このように基底状態の近くで Irregular states が出現することは，3個あるいは三角格子上の

反強磁性 spin 系の特徴で， Frustration-induced chaos といえる。強磁性結合の時は，少なくとも低 energy 領域では chaos は出現しない。

Chaos の出現する energy range が spin の数を増すにつれ（1－d のまま，又は，2－d三角格子状に），どのように変動するか？ 3個の古典 spin 系の Chaos や KAM は，量子版，特に半古典極限での性質にどのように反映するのか？ 量子論から古典論への transition において，Chaos の概念がいかなる役割を演じるのか？は，今后の課題である。

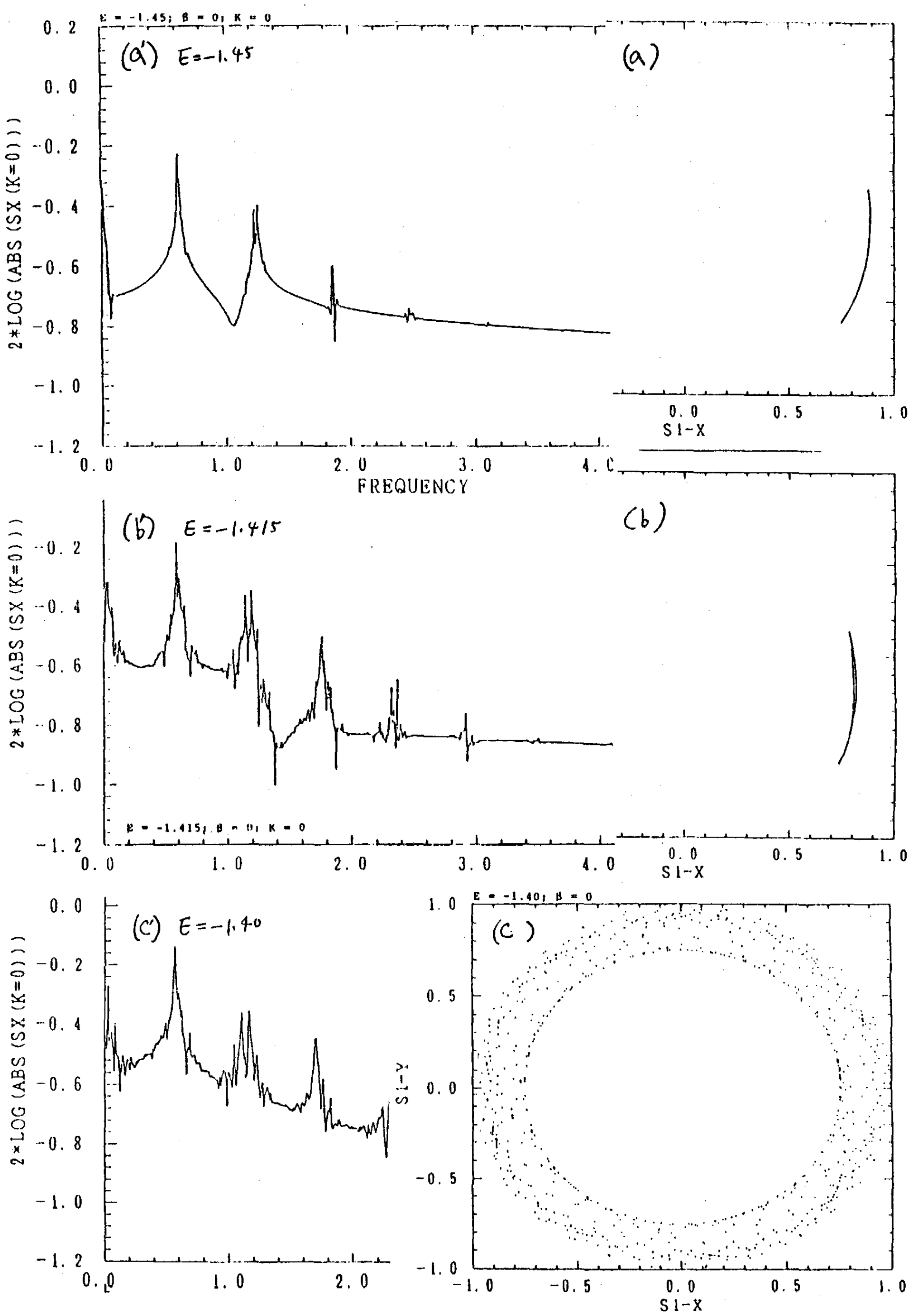

図2